



Un petit sondage pour commencer...

A- Mon point de vue...

- 1- La note DO a toujours la même fréquence
- 2- La note DO peut avoir différentes fréquences

Donner un argument pour justifier votre réponse.

B- Mon point de vue...

En musique, il y a

- 1- 7 notes
- 2- 12 notes
- 3- autant de notes que l'on veut

Activité 1 : Vibration, fréquence et note

Vous disposez des documents ci-dessous pour répondre aux questions.

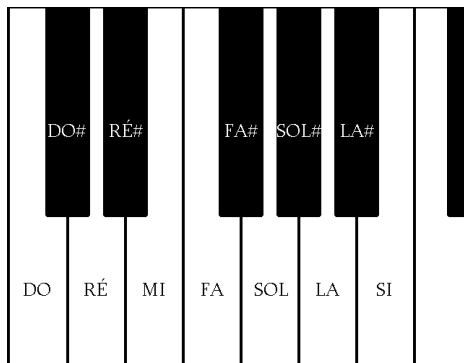
Doc 1 : Qu'est-ce qu'un intervalle ?

La musique est une succession de notes, elle est aussi une succession d'intervalles. **Mais qu'est-ce qu'un intervalle ?** Un intervalle est une sorte de « distance » entre deux notes de hauteurs différentes : il permet de caractériser l'écart de fréquences correspondantes.

Un intervalle entre deux sons est défini par le rapport (et non la différence) de leurs fréquences fondamentales.

Doc 2 : Fréquences de quelques notes et touches de piano

Touche	Do ³	Ré ³	Mi ³	Fa ³	Sol ³	La ³	Si ³	Do ⁴	Ré ⁴	Mi ⁴
F ₀ (Hz)	262	294	330	349	392	440	494	523	587	659



1. Compléter les phrases suivantes :

Une OCTAVE est l'intervalle qui sépare deux notes dont les fréquences f_1 et f_2 sont telles que $\frac{f_2}{f_1} = \dots\dots$

Une QUINTE est l'intervalle qui sépare deux notes dont les fréquences f_1 et f_2 sont telles que $\frac{f_2}{f_1} = \dots\dots$

2. Qu'ont de particulier deux notes séparées d'une octave ?

3. À votre avis pourquoi a-t-on choisi le mot QUINTE pour désigner cet intervalle particulier ?

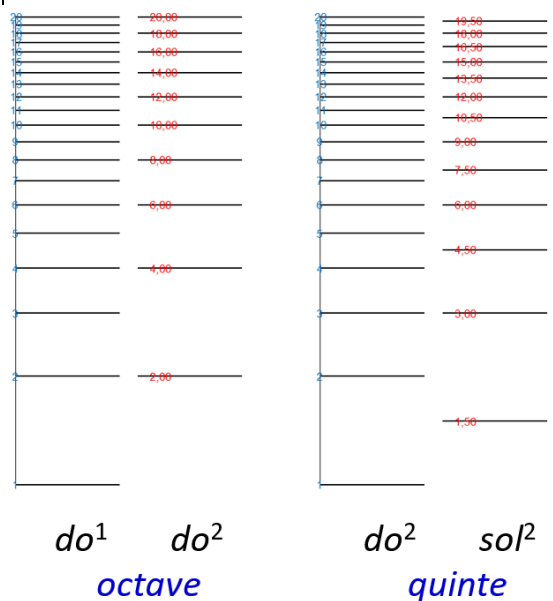
Activité 2 : La gamme de Pythagore ou le cycle des quintes

Doc 1 : Qu'est-ce qu'une gamme ?

On peut jouer une mélodie (suite de notes) selon plusieurs octaves : c'est normal car d'une octave à l'autre chaque note voit sa fréquence doublée. À l'intérieur d'un intervalle d'octave, la succession des notes par fréquence croissante s'appelle **une gamme**. Les gammes permettent d'organiser/structurer les notes à l'intérieur d'une octave.

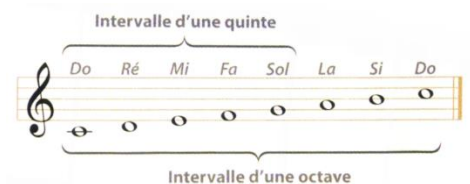
Lorsqu'on joue plusieurs notes successives ou plus encore quand on les joue simultanément, l'oreille est sensible aux rapports qui existent entre ces notes et perçoit une « consonance » lorsque le rapport mathématique des deux notes est simple. Et plus ce rapport est simple, plus l'oreille « estime » que les deux notes sont liées l'une à l'autre.

On peut justifier que certaines notes soient consonantes en observant les harmoniques présentes. Par exemple pour l'octave et la quinte, on obtient la liste des harmoniques ci-contre.



Au VI^{ème} siècle avant JC, pour Pythagore « tout est histoire de nombres », il propose alors des règles de proportions pour transcrire la musique.

Nous avons vu qu'on pouvait passer du Do3 au Do4 grâce à 7 notes « principales » : do, ré, mi, fa, sol, la, si.



Mais le clavier d'un piano indique bien qu'on peut ajouter 5 notes supplémentaires situées entre ces notes, 5 notes altérées (la hauteur de son de la note est modifiée) d'un dièse : do #, ré #, fa #, sol #, la # ou d'un bémol ré^b, mi^b, sol^b, la^b, si^b.

Il y a bien 12 notes entre un Do et le Do de l'octave supérieur, classées par fréquences fondamentales croissantes.

Mais quelles sont les valeurs de ces fréquences ?

Pythagore propose une méthode de calcul basée sur la quinte : nous allons reproduire sa méthode pour construire la **gamme dite de Pythagore**.

1. Dans le schéma ci-dessous, rappeler dans les cadres, le nombre de notes et le rapport des fréquences pour chacun des intervalles.

2. Méthode de construction de la gamme Do3 à Do4 à la manière de Pythagore

2.1 Calculer la fréquence de la note à la quinte du DO3 (261,1 Hz) et donner le nom de cette nouvelle note.

2.2. Compléter les schémas ② et ③ ci-dessous en respectant les consignes des deux personnages. Vous devez indiquer les valeurs des fréquences calculées f_1, f_2, \dots ainsi que le nom des notes correspondantes.

2.3. Construction de la gamme DO3 à DO4, noter les fréquences f_0 et $2f_0$ puis compléter le tableau ci-dessous :

1 Construisons une gamme entre ce do et son octave. Pour passer d'une note à sa quinte, il faut multiplier sa fréquence par $\frac{3}{2}$.

2 Allons jusqu'à la première quinte.

3 Poursuivons jusqu'à la deuxième quinte.

Sortie d'octave ! Divisez votre fréquence par 2.

Nom de la Note	Fréquence de la note (en Hz)	Pour aller à la quinte f ? $\times \frac{3}{2}$	Fréquence gardée ? f si $f < 2f_0$ sinon $\frac{f}{2}$
Do3	$f_0 = 261,1$		
Do4 cycle quinte			
Do4 octave	$2xf_0 =$		

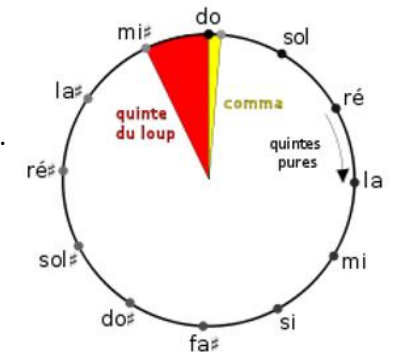
2.4. Expliquer pourquoi il y a 12 notes et non 13 notes ou plus pour passer d'une octave à l'autre.

2.5. Noter la valeur du décalage en Hz au bout d'un cycle de quintes.

Cet intervalle est appelé le « **comma pythagoricien** ». Les musiciens jouaient la dernière quinte dissonante, appelée « **quinte du loup** ».

Expliquer pourquoi elle était dissonante.

- 2.2 Un cycle bouclé grâce à une presque « égalité mathématique » !
- Soit F la fréquence de départ. Par quel facteur est-elle multipliée au bout de 12 quintes ?
 - Montrer que ce facteur multiplicatif est proche de celui obtenu pour 7 octaves.



Activité 3 : La gamme « au tempérament égal » ou à intervalles égaux

La gamme de Pythagore présente deux inconvénients majeurs pour les musiciens :

- le cycle des quintes « ne boucle pas » sur l'octave ;
- la transposition (jouer sur un autre registre musical en partant d'une autre note) est un vrai casse-tête.

Au cours de l'histoire on a donc trouvé des moyens de remédier à ces défauts.

Document 1 : un peu d'histoire

De nombreuses solutions ont été proposées, entre autres par Kepler et Euler, mais elles demeuraient insatisfaisantes puisque certaines modulations étaient toujours impossibles. C'est un mathématicien flamand, Simon Stevin, qui le premier accorda un monocorde (un instrument à une seule corde) en tempérament égal, c'est-à-dire une gamme composée de douze demi-tons exactement égaux. C'est ce qu'on appelle la gamme « au tempérament égal » ou encore gamme tempérée. Il a écrit un livre sur la musique, bien qu'il n'emploie pas le mot *musique* mais plutôt le terme *chanter*, *Vande spiegheling der singconst* (« Sur la théorie de l'art de chanter ») ; cet ouvrage, dans lequel il expose sa façon de construire la gamme tempérée, est resté un manuscrit jusqu'à sa parution à Amsterdam en 1884. La gamme tempérée fut adoptée dans le nord de l'Allemagne dès le XVII^e siècle, et on l'entendit pour la première fois sur l'orgue construit par Arp Schnitger à Hamburg en 1692. C'est pourquoi Bach pouvait se permettre dans ses pièces pour orgue de moduler dans des tonalités très éloignées, même si cela gênait la concentration des fidèles.

Bach adapta ce système à tous ses instruments à clavier. Il donna ses lettres de noblesse à ce système en composant deux séries de 24 préludes et fugues dans tous les tons, montrant ainsi ce que l'on pouvait faire avec un clavier bien tempéré.

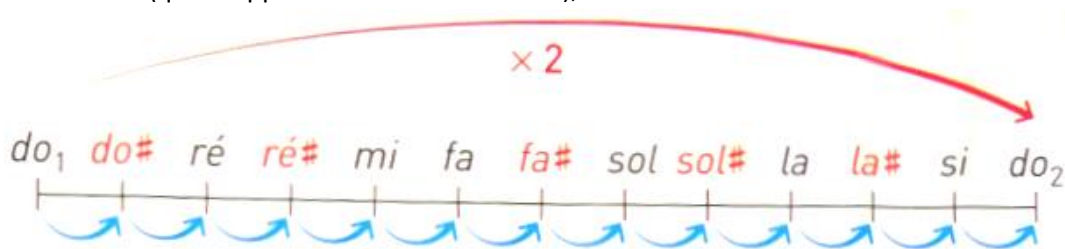
Source : <http://accromath.uqam.ca/2007/02/la-construction-des-gammes-musicales/>

Document 2 : la gamme « au tempérament égal »

Dans cette gamme, tous les intervalles sont identiques. On note la valeur de cet intervalle a .

On a donc $\frac{f_{n+1}}{f_n} = d$ où f_n et f_{n+1} sont deux fréquences consécutives de la gamme.

Au bout de 12 intervalles (qu'on appelle aussi des demi-tons), on retrouve un intervalle d'octave.



1. Si on nomme f_0 la fréquence du DO1, exprimer la fréquence f_{12} du DO2 en fonction de f_0 et de d .
2. En utilisant le fait que la fréquence du DO2 est le double de celle du DO1 (octave), en déduire la valeur de d (on donnera aussi sa valeur décimale calculée à la calculatrice).
3. Ce nombre d est irrationnel : qu'est-ce que cela signifie ?
4. Calculer les deux premières fréquences qui suivent un LA3 de fréquence 440 Hz dans la gamme tempérée et vérifier que vous retrouvez les valeurs données sur la document annexe (clavier de piano).

Aide mathématique

La racine carrée de x est le nombre qui, élevé au carré, donne x : $(\sqrt{x})^2 = x$. On peut aussi écrire $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

La racine douzième de x est le nombre qui, à la puissance 12, donne x : $(\sqrt[12]{x})^{12} = x$. On peut aussi écrire $\sqrt[12]{x} = x^{\frac{1}{12}}$.

Activité 3 : La gamme « au tempérament égal » ou à intervalles égaux

La gamme de Pythagore présente deux inconvénients majeurs pour les musiciens :

- le cycle des quintes « ne boucle pas » sur l'octave ;
- la transposition (jouer sur un autre registre musical en partant d'une autre note) est un vrai casse-tête.

Au cours de l'histoire on a donc trouvé des moyens de remédier à ces défauts.

Document 1 : un peu d'histoire

De nombreuses solutions ont été proposées, entre autres par Kepler et Euler, mais elles demeuraient insatisfaisantes puisque certaines modulations étaient toujours impossibles. C'est un mathématicien flamand, Simon Stevin, qui le premier accorda un monocorde (un instrument à une seule corde) en tempérament égal, c'est-à-dire une gamme composée de douze demi-tons exactement égaux. C'est ce qu'on appelle la gamme « au tempérament égal » ou encore gamme tempérée. Il a écrit un livre sur la musique, bien qu'il n'emploie pas le mot *musique* mais plutôt le terme *chanter*, *Vande spiegheling der singconst* (« Sur la théorie de l'art de chanter ») ; cet ouvrage, dans lequel il expose sa façon de construire la gamme tempérée, est resté un manuscrit jusqu'à sa parution à Amsterdam en 1884. La gamme tempérée fut adoptée dans le nord de l'Allemagne dès le XVII^e siècle, et on l'entendit pour la première fois sur l'orgue construit par Arp Schnitger à Hamburg en 1692. C'est pourquoi Bach pouvait se permettre dans ses pièces pour orgue de moduler dans des tonalités très éloignées, même si cela gênait la concentration des fidèles. Bach adapta ce système à tous ses instruments à clavier. Il donna ses lettres de noblesse à ce système en composant deux séries de 24 préludes et fugues dans tous les tons, montrant ainsi ce que l'on pouvait faire avec un clavier bien tempéré.

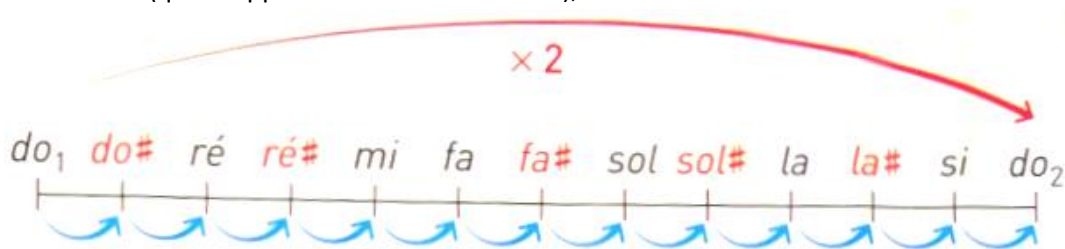
Source : <http://accromath.uqam.ca/2007/02/la-construction-des-gammes-musicales/>

Document 2 : la gamme « au tempérament égal »

Dans cette gamme, tous les intervalles sont identiques. On note la valeur de cet intervalle a .

On a donc $\frac{f_{n+1}}{f_n} = d$ où f_n et f_{n+1} sont deux fréquences consécutives de la gamme.

Au bout de 12 intervalles (qu'on appelle aussi des demi-tons), on retrouve un intervalle d'octave.



1. Si on nomme f_0 la fréquence du DO1, exprimer la fréquence f_{12} du DO2 en fonction de f_0 et de d .
2. En utilisant le fait que la fréquence du DO2 est le double de celle du DO1 (octave), en déduire la valeur de d (on donnera aussi sa valeur décimale calculée à la calculatrice).
3. Ce nombre d est irrationnel : qu'est-ce que cela signifie ?
4. Calculer les deux premières fréquences qui suivent un LA3 de fréquence 440 Hz dans la gamme tempérée et vérifier que vous retrouvez les valeurs données sur la document annexe (clavier de piano).

Aide mathématique

La racine carrée de x est le nombre qui, élevé au carré, donne x : $(\sqrt{x})^2 = x$. On peut aussi écrire $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

La racine douzième de x est le nombre qui, à la puissance 12, donne x : $(\sqrt[12]{x})^{12} = x$. On peut aussi écrire $\sqrt[12]{x} = x^{\frac{1}{12}}$.

THÈME 2 : SON ET MUSIQUE, PORTEURS D'INFORMATION

Chapitre 2 : La musique ou l'art de faire entendre les nombres... L'ESSENTIEL



L'intervalle musical entre deux notes est défini par le rapport de leurs fréquences. Certains intervalles sont agréables (consonants), d'autres le sont moins (dissonants).

Octave
L'intervalle f''/f vaut $2/1$.

$f'' = 2f$

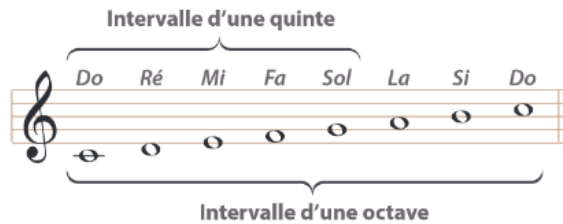
Les deux sons correspondent à une même note, à deux hauteurs différentes.

Quinte
L'intervalle f''/f vaut $3/2$.

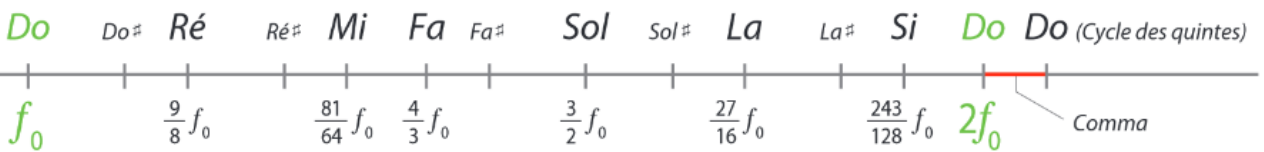
$f'' = 3/2f$

L'intervalle est consonant.

Une gamme est une suite de notes réparties sur une octave.



La gamme de Pythagore se construit grâce au cycle des quintes. Cette gamme est basée sur des notes consonantes car les rapports de fréquences sont des rapports de nombres entiers, mais les intervalles entre les notes ne sont pas constants.



Le cycle des quintes ne se refermant jamais complètement, il reste un petit écart, appelé « comma », entre la note de fin de cycle et l'octave réelle. Ce comma est suffisamment petit pour être négligé pour des cycles de 5, 7, 12 ou 53 notes.



La gamme à intervalles égaux se construit en divisant l'octave en douze parties égales appelées « demi-tons ». Le rapport des fréquences de deux notes séparées par un demi-ton est constant et vaut $2^{1/12}$.

