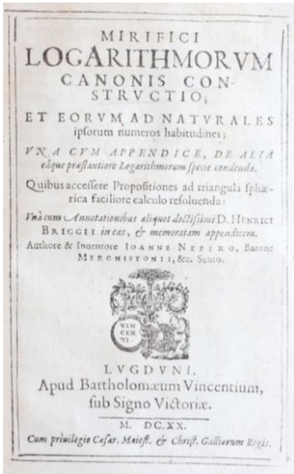
Introduction anticipée du logarithme décimal

"Je résous la question par le bienfait des logarithmes.
Je ne pense pas que quelque chose soit supérieur à la théorie de Neper…"
Kepler, 1624



MIRIFICI
LOGARITHMORVM
CANONIS CON-
STRVCTIO;
ET EORVM AD NATVRALES
ipsorum numeros habitudines;
VNA CVM APPENDICE, DE ALIA
eáque præstantiore Logarithmorum specie condenda.
Quibus accessere Propositiones ad triangula sphærica faciliore calculo resolvenda:
Vnà cum Annotationibus aliquot doctissimi D. HENRICI BRIGGII in eas, & memoratam appendicem.
Authore & Inventore IOANNE NEPERO, Barone MERCHISTONII, &c. Scoto.
LVGDVNI,
Apud Bartholomæum Vincentium, sub Signo Victoriæ.
M. DC.XX.
Cum privilegio Cæsar. Maiest. & Christ. Galliarum Regis.

C'est John Neper (1550-1617), baron écossais, qui définit le premier les logarithmes, dans deux ouvrages parus en 1614 et 1620, avec l'objectif de simplifier les calculs des marins et des astronomes :

« Très illustre amateur de mathématiques, comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée que les multiplications, les divisions et les extractions des racines carrées ou cubiques portent sur de grands nombres ; qu'elle est soumise à l'ennui des longues opérations et beaucoup plus encore à l'incertitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. »

Au cours de l'été 1615, l'anglais Henry Briggs rencontre Neper et discute avec lui de l'invention d'un système de logarithmes plus faciles à calculer, que ceux créés par Neper. De là naissent les logarithmes *décimaux*. Briggs mettra près de 10 ans, avec de nombreux calculateurs auxiliaires, à établir une table des logarithmes de 30 000 entiers naturels, avec une précision de 14 chiffres ! Elle sera publiée en 1624 dans le livre *Arithmetica logarithmica.*

Les fonctions logarithmes (du grec *logos* : logique, raison et *arithmos* : nombre) forment une grande famille, dont deux de ses membres sont particulièrement utilisés :

- le logarithme **népérien** (noté **ln** sur votre calculatrice)
- le logarithme **décimal** (noté **log** sur votre calculatrice)

Les logarithmes décimaux

L'idée de départ est de **remplacer les multiplications par des additions** et les quotients par des soustractions. Pour cela, on associe deux suites de nombres selon le schéma suivant :

$1 = 10^0 \quad \rightarrow \quad 0$ a) Quelle est la nature de la suite située à gauche des flèches ?

$10 = 10^1 \quad \rightarrow \quad 1$

$100 = 10^2 \quad \rightarrow \quad 2$ b) Quelle est la nature de la suite située à droite des flèches ?

$1\,000 = 10^3 \quad \rightarrow \quad 3$

On étend le procédé aux exposants négatifs, compléter :

$0{,}1 = \ldots\ldots \quad \rightarrow \ldots\ldots$; $0{,}01 = \ldots\ldots \quad \rightarrow \ldots\ldots$; $0{,}001 = \ldots\ldots \quad \rightarrow \ldots\ldots$

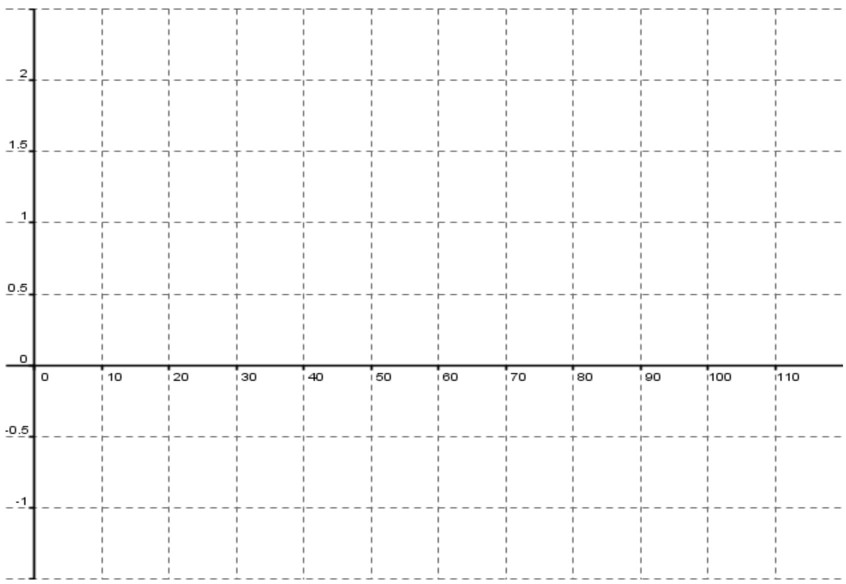
On définit ainsi une fonction appelée logarithme décimal

x	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1 000
$y = \log(x)$				0	1	2	3

Lorsque x est une puissance entière de 10, on a donc:

$\log(10^x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$	$y = \log(x) \iff x = \ldots\ldots\ldots$

Placer (lorsque l'échelle choisie le permet) les points correspondants aux valeurs précédentes dans le repère ci-contre.



Pour l'instant, cette **fonction** n'est **définie** que **lorsque** $\boldsymbol{x}$ est une **puissance entière de 10**.

Cherchons d'**autres valeurs**.

Soient *a* et *b*, deux nombres positifs, cherchons le nombre *g* situé entre *a* et *b* de telle façon que les nombres *a* , *g* , *b* soient en **progression géométrique** :

- Démontrer que $a \times b = g^2$ et en déduire g en fonction de a et b

Le nombre $\boldsymbol{g} =$ **…………..** s'appelle la **moyenne géométrique de *a* et *b***

Soient *a* et *b*, deux nombres, cherchons le nombre *m* situé entre *a* et *b* de telle façon que les nombres *a* , *m* , *b* soient en **progression arithmétique**:

- Démontrer que $a + b = 2m$ et en déduire m en fonction de a et b

Le nombre $\boldsymbol{m} =$ **………..** s'appelle la **moyenne arithmétique de *a* et *b***

On aura donc :

Moyenne géométrique de	Moyenne arithmétique de
0,1 et 10 :	-1 et 1 :
10 et 1000 :	1 et 3 :
10 et 100 :	1 et 2 :
1 et 10 :	0 et 1 :

- On obtient ainsi deux nouvelles valeurs (deux dernières lignes du tableau) :

$$\log(\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,) = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{et} \quad \log(\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Placer les deux nouveaux points correspondant dans le repère précédent.
- Relier « régulièrement » tous les points et vérifier que la courbe obtenue est bien celle de la fonction log obtenue avec la calculatrice.

On admet ainsi que $\mathbf{log}(\boldsymbol{x})$ **existe pour tout réel $\boldsymbol{x}$ strictement positif** (et non plus seulement pour les puissances entières de 10 et les nombres qui s'en déduisent par moyenne géométrique)

Finalement : pour tout réel strictement positif,

$$\boxed{y = \log(x) <=> x = 10^y} \quad \text{et} \quad \boxed{\log(10^x) = x}$$

Une propriété fondamentale

On sait que $10^2 \times 10^3 = 10^{\cdots\cdots}$

donc $\log(10^2 \times 10^3) = \log(10^{\cdots\cdots}) =$ ………. et $\log(10^2) + \log(10^3) =$ ……… + ……… = ………

pour tous les réels a et b strictement positifs : $\mathbf{log}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \mathbf{log}(\boldsymbol{a}) + \mathbf{log}(\boldsymbol{b})$

Établissons quelques conséquences de cette propriété :

1) Calculer de deux manières différentes $\log(\,a \times \frac{1}{a}\,)$, quelle propriété obtient-on ?

Pour tout réel *a* strictement positif

$\log(\,\frac{1}{a}\,) =$ ……………..

Pour tous les réels *a* et *b* strictement positifs

$\log(\,\frac{a}{b}\,) =$ …………………………..

2) Calculer de deux manières différentes $\log[(\sqrt{a})^2]$, quelle propriété obtient-on ?

Pour tout réel *a* strictement positif

$\log(\,\sqrt{a}\,) =$ ……………..

3) S'entrainer : Exprimer en fonction de $\log(x)$ et $\log(y)$:

$\log(xy^3) =$

$\log(\,\frac{x^3}{y^2}\,) =$

Diverses applications

par exemple en physique : $L = 10 \times \log\left(\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}_0}\right)$ par exemple en chimie pH = log([H3O+])

…………………et en maths aussi :

Recherche des valeurs « seuil » : A partir de quel rang a-t-on $2^n > 10^5$? $0{,}8^n < 10^{-5}$?

Pour chaque inéquation, utiliser d'abord la croissance (admise) de la fonction log puis la propriété (3) et conclure.