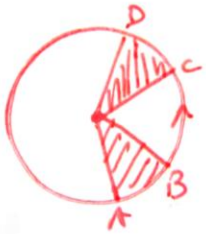
CAPEXOS

Chapitre C3 – Corrections

Pour tous les capexos, on donne la valeur de la constante de gravitation universelle : G=6,67.10^{-11} USI

Démontrer que dans l'approximation des trajectoires circulaires, le mouvement des satellites et planètes est uniforme

CAPEXO 1. Démontrer, en utilisant la 2ème loi de Kepler, que, dans l'approximation d'un mouvement circulaire, la vitesse d'une planète / d'un satellite est uniforme



Selon la 2e loi de Kepler, les aires balayées par le segment joignant l'attracteur et le satellite pendant une durée donnée sont égales. Ainsi, sur le schéma ci-contre les distances AB et CD parcourues pendant Δt sont égales : le mouvement est uniforme.

Exprimer la vitesse d'un satellite ou d'une planète en mouvement circulaire uniforme en fonction du rayon de son orbite et de la masse de l'astre attracteur

CAPEXO 2. Le satellite Hubble est un télescope spatial en orbite circulaire autour de la Terre. Depuis son lancement en 1990, il a permis de faire de nombreuses découvertes et d'améliorer notre connaissance de l'Univers. Ce satellite est placé à une altitude de 570km. On donne le rayon de la Terre $R_T = 6{,}37 \times 10^3$ km, ainsi que la masse de la Terre $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$kg et la masse de Hubble $M_H = 1{,}17\times10^4$ kg. Calculer la vitesse de Hubble dans le référentiel géocentrique.

D'après la 2e loi de Newton (système Hubble, référentiel géocentrique)

$M_H \frac{v^2}{R_T+h} = \frac{G M_T M_H}{(R_T+h)^2}$ où h est l'altitude. donc $v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T+h}}$

<u>AN</u> : $v = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{6{,}37\times10^6+570\times10^3}} = 7{,}58$ km.s^{-1}

CAPEXO 3. On considère le mouvement de la Terre comme un mouvement circulaire uniforme. On donne la masse du Soleil : $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg, la distance moyenne Terre-Soleil : D=149,6 x $10^{\cancel{9}\,6}$ ~~km~~. Déterminer la vitesse de la Terre dans le référentiel héliocentrique.

erreur

$v = \sqrt{\frac{G M_S}{D}}$ (cf ci-dessus) <u>AN</u>: $v = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times1{,}99\times10^{30}}{149{,}6\times10^9}}$

$v = 29{,}8$ km.s^{-1}

CAPEXO 4. La Lune est l'unique satellite de la Terre. Son orbite peut être considérée comme circulaire et sa vitesse de rotation autour de la Terre comme constante. On donne le rayon de l'orbite lunaire $R = 3{,}84 \times 10^5$ km, la vitesse de la Lune : $v_L = 1{,}02 \times 10^3$ m/s. En déduire la masse de la Terre.

la 2e loi de Newton donne $m\frac{v^2}{R} = \frac{G M_T m}{R^2}$ où m est la masse de la lune

donc $M_T = \frac{R v^2}{G}$ <u>AN</u>: $M_T = \frac{3{,}84\times10^8\times(1{,}02\times10^3)^2}{6{,}67\times10^{-11}}$

$= 5{,}99\times10^{24}$ kg.

CAPEXO 5. Mars a plusieurs satellites, dont Phobos. On suppose que Phobos a une trajectoire circulaire autour de Mars. Sachant que la masse de Mars est de 6,42 x 10^{23} kg et que Phobos a une trajectoire de rayon R = 9,38 x 10^3 km, calculer la valeur de la vitesse de Phobos dans le référentiel "marsocentrique".

$v = \sqrt{\frac{G M_{Mars}}{R}}$ AN : $v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 6,42 \times 10^{23}}{9,38 \times 10^{6}}} = 2,14 \times 10^{3} m.s^{-1}$

CAPEXO 6. La vitesse d'un satellite dépend-t-elle de sa masse ? Justifier à l'aide de la 2e loi de Newton.

La 2e loi de Newton permet d'écrire $\cancel{m}\vec{a} = -\frac{G \cancel{m} M}{R^2}\vec{u}$

donc $\vec{a}$ est indépendant de m. (où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire allant de l'astre attracteur au satellite)
Donc la vitesse également.

CAPEXO 7. Pourquoi tous les satellites géostationnaires situés à une même altitude ne peuvent-ils jamais entrer en collision ? La vitesse ne dépend que de la masse de l'objet attracteur et de la distance à cet objet donc sur une même orbite, tous les satellites ont la même vitesse.

CAPEXO 8. Les satellites géostationnaires sont situés à une altitude approximative de 36 x 10^3 km. On donne la masse de la Terre M_T = 5,98 x 10^{24}kg. Calculer leur vitesse dans le référentiel géocentrique.

$v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}$ h altitude.

AN : $v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}{6,37 \times 10^{6} + 36 \times 10^{6}}}$

$v = 3,07 \times 10^{3} m.s^{-1}$

CAPEXO 9. Canon de Newton :

« Ainsi, si un boulet de canon était tiré horizontalement du haut d'une montagne, avec une vitesse capable de lui faire parcourir un espace de deux lieues avant de retomber sur la terre : avec une vitesse double, il n'y retomberait qu'après avoir parcouru à peu près quatre lieues, et avec une vitesse décuple, il irait dix fois plus loin (pourvu qu'on ait point d'égard à la résistance de l'air), et en augmentant la vitesse de ce corps, on augmenterait à volonté le chemin qu'il parcourrait avant de retomber sur la terre, et on diminuerait la courbure de la ligne qu'il décrirait ; en sorte qu'il pourrait ne retomber sur la terre qu'à la distance de 10, de 30, ou de 90 degrés ; ou qu'enfin il pourrait circuler autour, sans y retomber jamais, et même s'en aller en ligne droite à l'infini dans le ciel »

Isaac Newton, *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*

En raisonnant sur la plus haute montagne du globe terrestre (Mont Everest à 8848 m d'altitude), pour quelle vitesse aurait-on « il pourrait circuler autour, sans y retomber jamais » ?
On donne le rayon de la Terre R_T = 6,37 x 10^3 km, ainsi que la masse de la Terre M_T = 5,98 x 10^{24}kg.

Il faudrait lancer à une vitesse telle que

$v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}$ AN : $v = 7,91 \times 10^{3} m.s^{-1}$

Exprimer la période de révolution d'un satellite ou d'une planète en mouvement circulaire uniforme, en fonction du rayon de son orbite et de la masse de l'astre attracteur Pour tous ces capexos : $T = \frac{2\pi R}{v}$ (car mvt uniforme) donc $T = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}$

CAPEXO 10. La station spatiale internationale est en orbite autour de la Terre à une altitude moyenne de 375km. Calculer sa période de rotation.
On donne le rayon de la Terre $R_T = 6{,}37 \times 10^3$ km, ainsi que la masse de la Terre $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$kg.

$T = 2\pi (R_T + h)\sqrt{\frac{R_T + h}{6{,}67\times10^{-11} \times 5{,}98\times10^{24}}} = 5{,}51\times10^3$ s $\simeq 92$ min.

CAPEXO 11. Eris est une planète nette en orbite elliptique autour du soleil avec une période de 557 années. Elle est quasiment de la même taille et plus massive que Pluton, dont la période de révolution vaut 248 ans et le demi-grand axe de sa trajectoire elliptique est 39,4 ua. Le demi-grand axe de la trajectoire d'Eris vaut 67,6 ua.

a. Sans calcul, indiquer si la période de révolution d'Eris est plus grand ou plus petite que celle de Pluton.
b. Calculer la période de révolution d'Eris.

Les deux planètes tournent autour du Soleil donc $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour les 2 planètes. a est plus grand pour Eris donc sa période est plus grande que celle de Pluton.

$T = \sqrt{\left(\frac{a}{a'}\right)^3}\, T'$ AN : $T = \sqrt{\left(\frac{67{,}6}{39{,}4}\right)^3} \times 248 = 557$ ans

CAPEXO 12. Mars a deux satellite, Deimos et Phobos donc les orbites sont considérées circulaires. Le rayon de l'orbite de Deimos est r = 23460 km et sa période de révolution est T = 30h18min. Phobos a un rayon orbital r' = 9380km et une période de révolution T'. Calculer T'.

$\frac{T^2}{r^3} = \frac{T'^2}{r'^3}$ d'après la 3e loi de Kepler donc $T' = \sqrt{\left(\frac{r'}{r}\right)^3}\, T$

AN : $T' = \sqrt{\left(\frac{9380}{23460}\right)^3} \times (30\times60+18)$ min $= 460$ min $\simeq 7$h40min.

CAPEXO 13. La station spatiale internationale est en orbite autour de la Terre à une altitude moyenne de 375km. Calculer sa période de rotation.
On donne le rayon de la Terre R_T=6,37 x 10^3 km, ainsi que la masse de la Terre M_T = 5,98 x 10^{24}kg.

Idem capexo 10 !

CAPEXO 14. Reprendre le CAPEXO 2. Calculer la période de révolution de Hubble.
On donne le rayon de la Terre R_T=6,37 x 10^3 km, ainsi que la masse de la Terre M_T = 5,98 x 10^{24}kg.

$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v}$ AN : $T = 5{,}753\times10^3$ s $= 95$ min 53 s.

CAPEXO 15. Reprendre le CAPEXO 5. Calculer la période de révolution de Phobos.

$T = \frac{2\pi R}{v}$ AN : $T = 27{,}5\times10^3 \simeq 7$h 39 min.

CAPEXO 16. Reprendre le CAPEXO 9. Calculer la période du boulet de canon.
On donne le rayon de la Terre R_T=6,37 x 10^3 km, ainsi que la masse de la Terre M_T = 5,98 x 10^{24}kg.

$T = 2\pi\frac{(R_T + h)}{v}$ AN : $T = 5{,}513\times10^3$ s $= 91$ min 53 s

Établir la 3ème loi de Kepler à partir des lois de Newton dans le cas particulier du mouvement circulaire uniforme

CAPEXO 17. D'après la 2ème loi de Kepler, et dans l'approximation d'un mouvement circulaire uniforme, on peut démontrer que la vitesse de révolution d'une planète ou d'un satellite est donnée par $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ avec M la masse de l'astre attracteur et R le rayon de l'orbite. En utilisant la définition de la période, démontrer la 3ème loi de Kepler.

Dans le cas d'un mouvement uniforme, $T = \frac{2\pi R}{v}$

donc $T^2 = 4\pi^2 R^2 \times \frac{R}{GM}$

on en déduit $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$: le rapport $\frac{T^2}{R^3}$ est bien indépendant de la masse du satellite.

Exploiter la 3ème loi de Kepler pour déterminer la masse d'un astre en exploitant les propriétés (période de révolution, rayon orbital) de ses satellites

CAPEXO 18. Calculer la masse de la Terre en utilisant les propriétés suivantes de la Lune : période de révolution : 27 jours, distance moyenne au centre de la Terre : 364400 km.

$M_T = \frac{4\pi^2}{G} \frac{R^3}{T^2}$ AN : $M_T = \frac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}} \times \frac{(364{,}400\times10^6)^3}{(27\times24\times3600)^2}$

$M_T = \underbrace{5{,}3}\times10^{24}$ kg

l'écart à la valeur connue vient de l'imprécision sur la période...

CAPEXO 19. Mars a deux satellite, Deimos et Phobos donc les orbites sont considérées circulaires. Le rayon de l'orbite de Deimos est r = 23460 km et sa période de révolution est T = $\underbrace{\text{30h18min}}_{109080\,s}$. Calculer la masse de Mars.

$M_T = \frac{4\pi^2}{G} \times \frac{r^3}{T^2}$ AN : $M_M = 6{,}42\times10^{23}$ kg

(cohérent avec la donnée de l'exercice 5)